OM DIFFERENTIALEKVATIONEN

$$\sum_{ik} A_{ik}(x\,,\,y)\,\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0$$

$$\left(\begin{matrix} i = 0\,,\,1\,...\,p \\ k = 0\,,\,1\,...\,q \end{matrix}\,,\quad p + q = n\,,\quad pq \neq 0\,,\quad A_{pq} = 1\right)$$

AKADEMISK AFHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AF

FILOSOFISKA FAKULTETENS I UPSALA

MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA SEKTION

FÖR FILOSOFISKA DOKTORSGRADENS VINNANDE

TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

Å LÄROSALEN N:o 11

LÖRDAGEN DEN 19 FEBRUARI 1898 KL. 10 F. M.

AF

ERIK HOLMGREN.

UPSALA 1898

AKADEMISKA BOKTRYCKERIET

EDV. BERLING.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548913_0069

Den i titeln angifna ekvationen har varit föremål för undersökningar af DELASSUS i andra afdelningen af hans viktiga arbete, Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques réelles (Annales de l'école normale 1895). Han generaliserar där på ett elegant sätt den af RIEMANN framstälda, af DU BOIS REYMOND, DARBOUX och PICARD närmare studerade integrationsmetoden till denna klass af ekvationer. Som en tillämpning visar han, hur den af honom i förra afdelningen af arbetet för alla lineära differentialekvationer med reela karakteristiker och analytiska koefficienter gifna satsen om beskaffenheten af de rörliga singulära linierna till de analytiska integralerna låter bevisa sig med tillhjälp af denna metod för den ifrågavarande klassen af ekvationer och detta äfven, utan att man behöfver göra antagandet, att koefficienterna och integralerna äro analytiska, blott de äga partiella derivator till och med en viss ordning.

I det följande skall jag i första afdelningen i vissa punkter komplettera fundamentallemman i DELASSUS metod samt visa, att man sedan med tillhjälp af densamma lätt kan bevisa de af honom framstälda satserna om singulariteterna hos integralerna för den ifrågavarande klassen af ekvationer (utan användande af den RIEMANN'ska integrationsmetoden) och detta utan att förutsätta mer om koefficienterna än att de äro kontinuerliga, samt om integralerna att de äro kontinuerliga jämte de i differentialekvationen ingående derivatorna.

I den senare afdelningen skall jag visa, huru den af LE ROUX i hans arbete, Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes (Annales de l'école normale 1895) gifna teorin för de till differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0$ hörande principalfunktionerna omedelbart låter utsträcka sig till den ifrågavarande klassen af ekvationer. Därvid kommer jag att beröra de viktiga undersökningar öfver inversionen af definita integraler, som VOLTERRA publicerat i flere afhandlingar i Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino för 1896 och i Rendiconti della R. Accademia dei Lincei för 1896.

I.

Låt oss hafva ett lineärt uttryck i z och dess partiella derivator, i hvilket man aldrig deriverar mer än p gånger i afseende på x och ej mer än q gånger i afseende på y,

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}$$

$$\left(\begin{matrix} i = 0, 1 \ldots p \\ k = 0, 1 \ldots q \end{matrix} , \; p + q = n \; , \; pq \neq 0 \; , \; \mathrm{A}_{pq} = 1 \right)$$

och betrakta differentialekvationen

$$\mathrm{F}(z) = 0 \; .$$

Denna differentialekvation har två reela karakteristiksystem, nämligen x = konst. af ordningen p och y = konst. af ordningen q.

Vi skola bevisa följande sats[1]):

Antag att koefficienterna $\mathrm{A}_{ik}(x,y)$ äro kontinuerliga inom och på gränsen af en rektangel R[2]) med sidorna parallela med axlarna. Låt x_0, y_0 vara det hörn, som har de minsta koordinaterna. Då existerar det en och endast en funktion $Z(x,y)$, som satisfierar differentialekvationen $\mathrm{F}(z) = 0$ och är kontinuerlig jämte alla i $\mathrm{F}(z)$ ingående derivator samt satisfierar vilkoren

$$Z(x_0,y) = Y_0(y) \, , \; \frac{\partial Z(x_0,y)}{\partial x} = Y_1(y) \; \ldots . \; \frac{\partial^{p-1} Z(x_0,y)}{\partial x^{p-1}} = Y_{p-1}(y)$$

$$Z(x,y_0) = X_0(x) \, , \; \frac{\partial Z(x,y_0)}{\partial y} = X_1(x) \; \ldots . \; \frac{\partial^{q-1} Z(x,y_0)}{\partial y^{q-1}} = X_{q-1}(x) .$$

---

[1]) Jfr Delassus: den i inledningen citerade afhandlingen. — Darboux, Théorie des surfaces, tome II (1889). Picard, Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, Journal de math. 1890, Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles, note I i Darboux, Théorie des surfaces, tome IV (1896).

[2]) Det område, som definieras af det inre af ett område R och dess begränsning r teckna vi i det följande med $(R + r)$.

Om funktionerna $Y_0(y)$, $Y_1(y) \ldots Y_{p-1}(y)$ antaga vi, att de äro kontinuerliga jämte derivatorna till och med ordningen q, då $y_0 \leq y \leq y_0 + \beta$ (β är längden af de sidor i R, som äro parallela med y-axeln), och om funktionerna $X_0(x)$, $X_1(x) \ldots X_{q-1}(x)$ antaga vi att de äro kontinuerliga jämte derivatorna till och med ordningen p, då $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ (α är längden af de sidor i R, som äro parallela med x-axeln).

Slutligen antages, att vilkoren

$$\left(\frac{d^\lambda X_\mu}{dx^\lambda}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d^\mu Y_\lambda}{dy^\mu}\right)_{y=y_0} \quad \begin{pmatrix}\lambda = 0, 1 \ldots (p-1) \\ \mu = 0, 1 \ldots (q-1)\end{pmatrix}$$

äro uppfylda.

För beviset skrifva vi differentialekvationen på formen

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q} = F(z) ,$$

genom att isolera den enda ingående derivatan af ordningen n. För att integrera medels succesiva approximationer, bilda vi det oändliga systemet af differentialekvationer

$$\frac{\partial^n z_1}{\partial x^p \partial y^q} = 0$$

$$\frac{\partial^n z_2}{\partial x^p \partial y^q} = F(z_1)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^n z_m}{\partial x^p \partial y^q} = F(z_{m-1})$$

$$\cdots\cdots ,$$

där vi integrera den första med de gifna begynnelsevilkoren, de följande med analoga begynnelsevilkor, men där X och Y äro ersatta med nollor.

Vi erhålla

$$z_1 = \sum_{k=0}^{q-1} X_k(x) \frac{(y-y_0)^k}{k!} + \sum_{i=0}^{p-1} Y_i(y) \frac{(x-x_0)^i}{i!} -$$

$$- \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(x-x_0)^i (y-y_0)^k}{i!\,k!} \left(\frac{d^i X_k(x)}{dx^i}\right)_{x=x_0}$$

$$z_2 = \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \cdots \int_{y_0}^{y} F(z_1)\, dx^p\, dy^q$$

. . . .

$$z_m = \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \cdots \int_{y_0}^{y} F(z_{m-1})\, dx^p\, dy^q$$

. . . .

Funktionerna $z_1, z_2 \ldots z_m \ldots$ äro tydligen kontinuerliga jämte de i $F(z)$ ingående derivatorna i $(R + r)$. Låt M vara maximum på $| F(z_1) |$ i $(R + r)$ och K det största af maximivärdena på funktionerna $| A_{ik} |$ i $(R + r)$. Låt oss med $\bar{z}_2, \bar{z}_3 \ldots \bar{z}_m \ldots$ beteckna de uttryck, som framkomma, då vi i högra membra af de ekvationer, som definiera funktionerna $z_2, z_3 \ldots z_m \ldots$ ersätta $F(z_1)$ med M, koefficienterna med K samt z_m med $\bar{z}_m$.

Vi hafva då tydligen, om vi använda beteckningen $[z]^i_k = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\, \partial y^k}$,

$$\begin{array}{l} | [z_2]^i_k | < [\bar{z}_2]^i_k \\ | [z_3]^i_k | < [\bar{z}_3]^i_k \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ | [z_m]^i_k | < [\bar{z}_m]^i_k \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} i = 0, 1 \ldots p \\ k = 0, 1 \ldots q \end{array}, \; i + k < n \right)$$

Funktionerna $[\bar{z}_m]^i_k$ bestå af en summa termer af formen $\alpha^{(m)}_{rs} \dfrac{(x - x_0)^r}{r!} \cdot \dfrac{(y - y_0)^s}{s!}$, där $\alpha^{(m)}_{rs}$ äro positiva konstanter. I funktionerna $[\bar{z}_2]^i_k$ är lägsta dimensionen på någon term den första, i $[\bar{z}_3]^i_k$ den andra och generellt i $[\bar{z}_m]^i_k$ den $(m - 1)$: ta. Om vi med μ beteckna öfre gränsen för

$$\frac{\alpha^r}{r!} \cdot \frac{\beta^s}{s!},$$

då r och s antaga godtyckliga positiva heltalsvärden eller noll, med N antalet termer i $F(z)$ och med Δ det större af talen α och β, så få vi lätt, om vi observera att $\alpha^{(m)}_{rs} < MK^{m-2}$,

$$\left.\begin{aligned}
&[\bar z_2]_k^i < M\mu\frac{\Delta}{1}\\
&[\bar z_3]_k^i < M\mu\,(NK)\frac{\Delta^2}{1^2}\\
&[\bar z_4]_k^i < M\mu(NK)^2\frac{\Delta^3}{1^2\,2}\\
&\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&[\bar z_m]_k^i < M\mu(N\,K)^{m-2}\frac{\Delta^{m-1}}{(m-1)}\\
&\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,
\end{aligned}\right\}\ \text{i}\ (R+r)$$

där vi med (m) förstå produkten af de m första termerna i serien

$$1\,,1\,,2\,,2\,,3\,,3\ \ldots\ l\,,l\ \ldots$$

Serien

$$M\mu\left[\frac{\Delta}{1}+(KN)\frac{\Delta^2}{1^2}+(KN)^2\frac{\Delta^3}{1^2 2}+\ldots+(KN)^{m-2}\frac{\Delta^{m-1}}{(m-1)}+\ldots\right]$$

är konvergent för alla Δ. Häraf följer då omedelbart att serierna

$$z_1+z_2+\ldots+z_m+\ldots$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{\partial^{i+k}z_1}{\partial x^i\partial y^k}+\frac{\partial^{i+k}z_2}{\partial x^i\partial y^k}+\ldots+\frac{\partial^{i+k}z_m}{\partial x^i\partial y^k}+\ldots$$

$$\left(\begin{matrix}i=0,1\ \ldots\ p\\ k=0,1\ \ldots\ q\end{matrix},\ i+k<n\right)$$

äro likformigt (och absolut) konvergenta i $(R+r)$ och representera således en funktion z och dess derivator $\frac{\partial^{i+k}z}{\partial x^i\partial y^k}\left(\begin{matrix}i=0,1\ .\ p\\ k=0,1\ .\ .\ q\end{matrix},\ i+k<n\right)$, kontinuerliga i $(R+r)$.

Vi skola nu bevisa, att denna funktion är af den sökta beskaffenheten. Fördenskull ha vi att visa, att den satisfierar de gifna begynnelsevilkoren. Detta är omedelbart tydligt däraf, att den uppfyller samma begynnelsevilkor som z_1. Vidare ha vi att visa, att z har derivatan $\frac{\partial^n z}{\partial x^p\,\partial y^q}$ (kontinuerlig i $(R+r)$), samt att den satisfierar differentialekvationen.

Ur de $(m+1)$ första ekvationerna i det system af integrallikheter, som definiera $z_1, z_2 \ldots z_m \ldots$, få vi

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{m+1} =$$

$$z_1 + \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \ldots \int_{y_0}^{y} F(z_1 + z_2 + \ldots + z_m) dx^p dy^q .$$

Sätt

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_m = s_m ,$$

så finna vi, att hur liten än den positiva kvantiteten σ är, kunna vi finna ett positivt helt tal M, så stort att

$$\left| \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} - \frac{\partial^{i+k} s_m}{\partial x^i \partial y^k} \right| < \sigma \text{ för alla } m \geqq M$$

$$\left(\begin{matrix} i = 0, 1 \ldots p \\ k = 0, 1 \ldots q \end{matrix}, i + k < n \right) .$$

Häraf följer, att för samma m-värden

$$| F(z) - F(s_m) | < KN\sigma ,$$

och således

$$\left| z - z_1 - \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \ldots \int_{y_0}^{y} F(z) dx^p dy^q \right| <$$

$$< \sigma \left[1 + KN \frac{(x-x_0)^p}{p!} \cdot \frac{(y-y_0)^q}{q!} \right] ,$$

d. v. s. emedan venstra membrum är oberoende af m,

$$z = z_1 + \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \ldots \int_{y_0}^{y} F(z) dx^p dy^q .$$

Differentieras p gånger i afseende på x och q gånger i afseende på y, så fås, emedan $\frac{\partial^n z_1}{\partial x^p \partial y^q} = 0$,

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q} = F(z) \text{, d. v. s.}$$

$$F(z) = 0 \; ,$$

och således är z en funktion af den önskade beskaffenheten.

Återstår att visa, att det ej existerar någon annan integral, som uppfyller de gifna vilkoren. Antag, att så vore förhållandet. Vi skulle då hafva två integraler, svarande mot de gifna vilkoren. Beteckna deras skilnad med u, så är u en integral till differentialekvationen, som antar begynnelsevärdena noll. Vi skola visa, att $u = 0$.

Vi hafva

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^p \partial y^q} = -\sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k}$$

$$\left(\begin{matrix} i = 0, 1 \ldots p \\ k = 0, 1 \ldots q \end{matrix} , i + k < n \right) .$$

Låt μ vara maximivärdet på

$$\left| \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} \right|$$

i en godtycklig från x_0, y_0 utgående mindre rektangel $\bar{R}$ (med sidorna $\bar{\alpha}$ och $\bar{\beta}$).

På grund af formeln

$$\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = -\int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \cdots \int_{y_0}^{y} \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} \cdot dx^{p-i} dy^{q-k}$$

fås

$$\left| \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} \right| < \mu \frac{\bar{\alpha}^{p-i}}{(p-i)!} \cdot \frac{\bar{\beta}^{q-k}}{(q-k)!}$$

$$\left(\begin{matrix} i = 0, 1 \ldots p \\ k = 0, 1 \ldots p \end{matrix} , i + k < n \right)$$

i $(\bar{R} + \bar{r})$, och således

$$\left| \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} \right| < K \mu \sum_{ik} \frac{\bar{\alpha}^{p-i}}{(p-i)!} \cdot \frac{\bar{\beta}^{q-k}}{(q-k)!} .$$

Men genom att taga $\bar{\alpha}$ och $\bar{\beta}$ tillräckligt små, kan man få

$$K \sum_{ik} \frac{\alpha^{p-i}}{(p-i)!} \cdot \frac{\beta^{q-k}}{(q-k)!} < 1$$

och således

$$\left| \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} \right| < \mu \text{ i } (\bar{R} + \bar{r}) .$$

Men maximivärdet inom detta område för $\left| \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} \right|$ är enligt antagandet $= \mu$. Således hafva vi blifvit förda till en motsägelse, och således är $u \equiv 0$ i $(\bar{R} + \bar{r})$. Genom att uppdela vår rektangel R i ett nät af rektanglar, som uppfylla vilkoret

$$K \sum_{ik} \frac{\alpha^{p-i}}{(p-i)!} \cdot \frac{\beta^{q-k}}{(q-k)!} < 1 ,$$

få vi ett antal rektanglar, på hvilka vi kunna successive använda det föregående resonnementet, och sålunda få vi slutligen att $u \equiv 0$ i hela $(R + r)$.

Det existerar således endast en integral svarande mot de gifna vilkoren, och denna kunna vi erhålla medels approximationsmetoden.

Vi skola nu undersöka denna integral Z såsom funktion af x_0 och y_0 och skola visa att Z jämte dess derivator af formen $\frac{\partial^{i+k+j+h} Z}{\partial x^i \partial y^k \partial x_0^j \partial y_0^h} \begin{pmatrix} i = 0, 1 \ldots p \\ k = 0, 1 \ldots q \end{pmatrix}, j + h < s \Big)$ äro kontinuerliga funktioner af dessa variabler i $(R + r)$, om vi förutsätta att koefficienterna $A_{ik}(x, y)$ hafva derivator af formeln $\frac{\partial^{i'+k'} A_{ik}}{\partial x^{i'} \partial y^{k'}}$ $(i' + k' \leq s - 1)$, kontinuerliga i $(R + r)$, samt att funktionerna X och Y och deras derivator med afseende på x och y äro kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen s i afseende på x_0 och y_0. För beviset använda vi de successiva approximationerna, med hvilkas tillhjälp vi bildade funktionen Z.

Vi betrakta serierna

$$\frac{\partial^{j+h} [z_1]_k^i}{\partial x_0^j \partial y_0^h} + \frac{\partial^{j+h} [z_2]_k^i}{\partial x_0^j \partial y_0^h} + \ldots + \frac{\partial^{j+h} [z_m]_k^i}{\partial x_0^j \partial y_0^h} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} i = 0, 1 \ldots p \\ k = 0, 1 \ldots q \end{matrix} , i + k < n , j + h \leq s \right)$$

och skola bevisa, att de äro likformigt konvergenta, då x_0, y_0 är belägen i $(R + r)$ (x, y betraktas då såsom en fix punkt i $(R + r)$).

Däraf följer då att dessa serier representera de åsyftade funktionerna, som sålunda existera och äro kontinuerliga funktioner af x_0 och y_0 i $(R + r)$.

För fallet $j + h = 0$ är saken tydlig, ty antag att $| F(z_1) | < M$, så hafva vi

$$| [z_m]^i_k | < M\mu (NK)^{m-2} \frac{\Delta^{m-1}}{(m-1)},$$

som gäller hvar än x_0, y_0 är belägen inom $(R + r)$. Vi gå så till att undersöka det fall då $j + h = 1$ och antaga till exempel att $j = 1, h = 0$. Vi hafva

$$\frac{\partial [z_m]^i_k}{\partial x_0} = \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \cdots \int_{y_0}^{y} [F(z_{m-1})]_{x=x_0} \, dx^{p-i-1} \, dy^{q-k} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \cdots \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(z_{m-1})}{\partial x_0} \, dx^{p-i} \, dy^{q-k}$$

$$(m = 2, 3 \ldots),$$

där vi för enkelhets skull antaga $x > x_0, y > y_0$.

Låt oss nu med $U^i_k(z_{m-1})$ beteckna de funktioner, som framgå ur högra membra af dessa likheter på följande sätt. Funktionen $U^i_k(z_1)$ erhålles ur uttrycket för $\frac{\partial [z_2]^i_k}{\partial x_0}$, då $[F(z_1)]_{x=x_0}$ och $\frac{\partial F(z_1)}{\partial x_0}$ ersättas med en positiv kvantitet $\frac{1}{2} M'$ sådan att

$$| F(z_1) | < \frac{1}{2} M', \quad \left| \frac{\partial F(z_1)}{\partial x_0} \right| < \frac{1}{2} M'.$$

$U^i_k(z_{m-1})$ erhålles ur högra membrum af $\frac{\partial [z_m]^i_k}{\partial x_0}$ genom att ersätta koefficienterna för $[z_{m-1}]^i_k$ och dess derivator med den positiva konstanten K, som är större än det största af maximivärdena på $| A_{ik} |$ och $\left| \frac{\partial A_{ik}}{\partial x} \right|$ i $(R + r)$, funktionerna $[z_{m-1}]^i_k$ med $\overline{[z_{m-1}]}^i_k$ och $\frac{\partial [z_{m-1}]^i_k}{\partial x_0}$ med $U^i_k[z_{m-2}]$.

Vi hafva då tydligen

$$\left| \frac{\partial [z_m]^i_k}{\partial x_0} \right| < U^i_k(z_{m-1}).$$

$U_k^i(z_{m-1})$ är en summa termer af formen $\alpha_{rs}^{(m-1)} \frac{(x-x_0)^r}{r!} \cdot \frac{(y-y_0)^s}{s!}$, där $\alpha_{rs}^{(m-1)}$ äro positiva konstanter. $U_k^i(z_1)$ innehåller termer af lägsta dimensionen noll, $|\alpha_{rs}^{(1)}| < M'$. $U_k^i(z_2)$ innehåller termer af lägsta dimensionen 1, $|\alpha_{rs}^{(2)}| < M'K$ och antalet termer är mindre än N', om jag med N' betecknar talet $2N$. $U_k^i(z_3)$ innehåller termer af lägsta dimensionen 2, $|\alpha_{rs}^{(3)}| < M'K^2$, och antalet termer är mindre än N'^2 o. s. v. $U_k^i(z_{m-1})$ innehåller termer af lägsta dimensionen $(m-2)$, $|\alpha_{rs}^{(m-1)}| < M'K^{m-2}$, antalet termer är mindre än N'^{m-2}. Häraf följer då, att vi hafva

$$\left|\frac{\partial [z_m]_k^i}{\partial x_0}\right| < M'(KN')^{m-2} \mu \frac{\Delta^{m-2}}{(m-2)} .$$

Häraf följer då omedelbart den likformiga konvergensen hos vår serie här ofvan för $j = 1$, $k = 0$, p.s.s. bevisas saken då $j = 0$, $h = 1$. För de högre derivatorna tillgår beviset på alldeles analogt sätt, så det torde vara öfverflödigt att närmare ingå på denna sak. Sedan sålunda existensen och kontinuiteten hos funktionerna

$$\frac{\partial^{i+k+j+h} Z}{\partial x^i \partial y^k \partial x_0^j \partial y_0^h} \left(\begin{matrix} i = 0, 1 \ldots p \\ k = 0, 1 \ldots q \end{matrix}, \; i + k < n, j + h \leq s\right)$$

blifvit uppvisad, inser man existensen och kontinuiteten af derivatorna $\frac{\partial^{n+j+h} Z}{\partial x^p \partial y^q \partial x_0^j \partial y_0^h}$ $(j + h \leq s)$ ur differentialekvationen genom differentiation med afseende på x_0 och y_0. Det torde vara öfverflödigt att anmärka, att på grund af den föregående deduktionen de betraktade funktionerna äro kontinuerliga funktioner af de fyra variablerna x, y, x_0, y_0 i $(R + r)$[1].

Vi skola nu betrakta singulariteterna hos integralerna.

Om vi på ett bestämdt sätt fortsätta[2]) en integral till vår differentialekvation, få vi den definierad inom ett sammanhängande område Γ, begränsadt af en viss punktmängd, hvilken utgör den

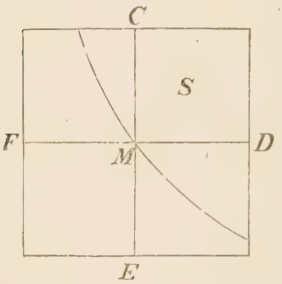
---

[1]) Med tillhjälp af de nu erhållna resultaten skulle man på ett enkelt sätt kunna bevisa DARBOUX's reciprocitetssats för den ifrågavarande ekvationen utan användande af den RIEMANN'ska integrationsmetoden (jfr den förut citerade afhandlingen af DELASSUS). Jag ingår dock icke här på denna fråga.

[2]) Med att fortsätta en integral, som i A uppfyller kontinuitetsvilkoren inom ett område B, menas att bilda en integral, som i $(A + B)$ uppfyller kontinuitetsvilkoren, och som i A öfverensstämmer med den gifna.

ifrågavarande integralens *singulariteter*. Dessa singulariteter kunna antingen vara *fixa*, d. v. s. oberoende af den betraktade integralen, och äro då nödvändigt singulära för differentialekvationens koefficienter eller, ock *rörliga*, d. v. s. beroende af den integral, som betraktas. De rörliga singulariteterna kunna vara af två slag allt eftersom de äro singulära för koefficienterna eller icke.

I det följande skola vi undersöka beskaffenheten hos de rörliga singulariteterna af det andra slaget. Låt M vara en sådan singulär punkt. Vi omge denna punkt med en kvadrat A med sidorna parallela med axlarna, inom hvilken ingen singulär punkt till koefficienterna faller. Låt S vara ett område, som afgränsas från Γ genom kvadraten A, och på hvars begränsning M är belägen. Vi göra nu följande anmärkning. Låt P och Q vara tvänne godtyckliga punkter i S. Jag påstår, att vår integral existerar i den rektangel med sidorna parallela med axlarna, som har PQ till diagonal. Ty emedan P och Q äro belägna inom S, kunna vi kontinuerligt öfvergå från P till Q medels punkter, som tillhöra området S, och således kunna vi mellan P och Q inskjuta ett antal kvadrater med sidorna parallela med axlarna, som gränsa intill hvarandra, inom och på hvilka vår integral existerar, och inom hvilka P och Q äro belägna. Utgående från P kunna vi beteckna dessa i ordning med $P_1, P_2 \ldots P_n$. På grund af det föregående blir då vår integral definierad i den rektangel med sidorna parallela med axlarna, i hvilken P_1 och P_2 kunna inpassas o. s. v. Fortsätta vi sålunda, finna vi, att integralen blir definierad i en rektangel med sidorna parallela med axlarna, inom hvilken P och Q äro belägna.



Låt nu N vara en punkt i S, som ej är belägen på CE eller FD. Antag till exempel att den är belägen i kvadraten CD. Då kan det ej finnas några singulära punkter inom den rektangel med sidorna parallela med axlarna, som har MN till diagonal. Ty antag att det funnes en singulär punkt inom detta område. Då kan man taga en punkt M' tillhörande området S tillräckligt nära intill M, så att den singulära punkten kommer att vara belägen inom rektangeln $M'N$, och således kan på grund af den nyss gjorda anmärkningen den singulära punkten icke existera. Punkten M är således antingen belägen på en singulär linie, bestående af två

från M utgående segment af de bägge räta linierna MC och MD, eller också finnas nödvändigt punkter tillhörande S inom någondera af kvadraterna CMF eller DME. Vi betrakta det senare fallet. Antag t. ex., att vi hafva en till S hörande punkt N' inom kvadraten FMC. Då finnas inga singulära punkter inom rektangeln $N'M$ (och ej heller på MC i en tillräckligt liten närhet till M). Då är M belägen på en singulär linie, som består af två från M utgående segment af den räta linien FD eller ock finnas punkter tillhörande S i kvadraten FME. Men då kan tydligen (på grund af den nyss gjorda anmärkningen) M icke vara någon singulär punkt. Således om M är singulär, så måste den vara en punkt på en singulär linie, som är bildad af karakteristiksegment, så att från M utgå två singulära segment. Är M belägen i en hörnpunkt, så är den vinkel de omslutande segmenten bilda inåt området S nödvändigt $= \frac{\pi}{2}$.

Antaga vi att koefficienterna till vår differentialekvation ej hafva några singulariteter inom ändligt område, så finnas inga fixa singulariteter, ej heller några rörliga singulariteter af första slaget. De enda singulariteter, som kunna förefinnas äro singulära linier, bildade af karakteristiksegment. Existensområdet för en integral blir då tydligen en rektangel med sidorna parallela med axlarna (eller en afart, som fås, då en eller flera sidor äro oändligt aflägsna).

II.

Vi skola behandla uppgiften:

Existerar det lösningar till differentialekvationen

$$\sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0 \left(\begin{matrix} i = 0, 1 \ldots p \\ k = 0, 1 \ldots q \end{matrix}, p + q = n, pq \neq 0, A_{pq} = 1 \right)$$

beroende af en arbiträr konstant α sådana, att integralen

$$\int f(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha$$

är en lösning till differentialekvationen, då gränserna äro lämpligt valda funktioner af x och y, och $f(\alpha)$ antages arbiträr?

Vi antaga för enkelhets skull, att endast den ena af gränserna t. ex. den öfre i integralen är funktion af x och y. Det fall då bägge gränserna äro funktioner af x och y kan återföras på detta fall.

Betrakta sålunda integralen

$$Z(x, y) = \int_{\alpha_0}^{\theta(x, y)} f(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha$$

Genom differentiation erhålla vi[1])

$$\frac{\partial^{i+k} Z(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} = \frac{d^i}{dx^i} \left[\sum_{s=1}^{k} \frac{d^{s-1}}{dy^{s-1}} \left\{ f(\theta) \frac{\partial^{k-s} z(x, y, \theta)}{\partial y^{k-s}} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} \right] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{i} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} \left\{ f(\theta) \frac{\partial^{i+k-r} z(x, y, \theta)}{dx^{i-r} dy^k} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} +$$

$$+ \int_{\alpha_0}^{\theta} f(\alpha) \frac{\partial^{i+k} z(x, y, \alpha)}{\partial x^i \partial y^k} d\alpha$$

---

[1]) De i det följande utförda operationerna äro berättigade vid de val af f, θ och z, som i det följande komma att göras.

$$= \frac{d^k}{dy^k}\left[\sum_{r=1}^{i} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left\{f(\theta)\,\frac{\partial^{i-r} z(x,y,\theta)}{\partial x^{i-r}}\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\}\right] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \frac{d^{s-1}}{dy^{s-1}}\left\{f(\theta)\,\frac{\partial^{i+k-s} z(x,y,\theta)}{\partial x^i\, dy^{k-s}}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}\right\} +$$

$$+ \int_{\alpha_0}^{\theta} f(\alpha)\,\frac{\partial^{i+k} z(x,y,\alpha)}{\partial x^i \partial y^k}\, d\alpha\,.$$

Insätta vi i differentialekvationen dessa uttryck på Z och derivatorna af Z t. ex. efter den öfre formeln, så få vi, om vi ordna efter $f(\theta)$ och dess derivator

$$\sum_{ik} A_{ik}\,\frac{\partial^{i+k} Z(x,y)}{\partial x^i \partial y^k} = \sum \mathcal{A}_{i+k-1}\, f^{(i+k-1)}(\theta) = 0\,.$$

Som $f(\alpha)$ antogs vara en arbiträr funktion, så måste vi hafva

$$\mathcal{A}_{i+k-1} = 0 \quad (1 \leq i + k < n)\,.$$

Betrakta ekvationen

$$\mathcal{A}_{p+q-1} = 0\,.$$

Den kan tydligen skrifvas på formen

$$z(x,y,\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^p \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^q = 0\,.$$

Vi måste således antingen hafva $\frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} \neq 0$, och dä är $z(x,y,\theta) = 0$, eller ock $\frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0$.

Vi undersöka först det förra fallet.

Betrakta likheten

$$\mathcal{A}_{p+q-2} = 0\,.$$

Denna låter, om vi observera att $\frac{dz(x,y,\theta)}{dx} = 0$, $\frac{dz(x,y,\theta)}{dy} = 0$ skrifva sig på formen

$$\frac{\partial z(x,y,\theta)}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^p \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^{q-1} = 0\,,$$

och således måste vi hafva

$$\frac{\partial z(x,y,\theta)}{\partial y} = 0 .$$

Af ekvationerna $\frac{dz(x,y,\theta)}{dx} = 0$ och $\frac{dz(x,y,\theta)}{dy} = 0$ följer nu att

$$\frac{\partial z(x,y,\theta)}{\partial x} = \frac{\partial z(x,y,\theta)}{\partial y} = \frac{\partial z(x,y,\theta)}{\partial \theta} = 0 .$$

Betrakta nu ekvationen

$$\mathcal{A}_{p+q-3} = 0 ,$$

så erhålla vi med användande af de föregående formlerna och de som erhållas ur dessa genom differentiation

$$\frac{\partial^2 z(x,y,\theta)}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^p \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^{q-2} = 0$$

och sålunda

$$\frac{\partial^2 z(x,y,\theta)}{\partial y^2} = 0 .$$

Häraf erhållas då omedelbart

$$\frac{\partial^2 z(x,y,\theta)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z(x,y,\theta)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z(x,y,\theta)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z(x,y,\theta)}{\partial x \partial \theta}$$

$$= \frac{\partial^2 z(x,y,\theta)}{\partial y \partial \theta} = \frac{\partial^2 z(x,y,\theta)}{\partial \theta^2} = 0 .$$

Om vi fortgå på detta sätt och successive betrakta ekvationerna $\mathcal{A}_{i+k-1} = 0$ och därvid observera de redan härledda formlerna samt de, som framgå ur dessa genom differentiation, erhålla vi utan svårighet, att funktionen $z(x,y,\theta)$ är noll jämte alla partiella derivator med afseende på x, y och θ till och med ordningen $(n-1)$, och således är utefter kurvan $\theta(x,y) = \alpha$ funktionen $z(x,y,\alpha)$ noll jämte alla partiella derivator med afseende på x och y till och med ordningen $(n-1)$. Jag skall då visa att $z(x,y,\alpha)$ är identiskt noll inom sitt existensområde. Betrakta fördenskull en del AB af kurvan $\theta(x,y) = \alpha$, som ej har någon tangent parallel med koordinataxlarna. Tag en punkt P så nära intill bågen AB, så att den krokliniga triangeln PMN, som begränsas af de genom

P gående karakteristikerna och ett segment MN af bågen AB faller inom integralen $z(x,y,\alpha)$ existensområde. För en punkt x,y (P') inom PMN hafva vi då

$$z(x,y,\alpha) = \varepsilon \int \ldots \int_{(i+k<n)} \int \ldots \int \sum_{ik} A_{ik}(\xi,\eta) \frac{\partial^{i+k} z(\xi,\eta.\alpha)}{\partial \xi^i \partial \eta^k} d\xi^p d\eta^q \ ,$$

där ε betyder $+1$ eller -1, och där integralen är utsträckt öfver den krokliniga triangel, som begränsas af de genom x,y gående karakteristikerna och bågen AB.

Beteckna med μ maximum af

$$\sum_{ik} A_{ik}(x,y) \frac{\partial^{i+k} z(x,y,\alpha)}{\partial x^i \partial y^k}$$

inom och på begränsningen af PMN, så finna vi med tillhjälp af den föregående formeln

$$\left| \frac{\partial^{i+k} z(x,y,\alpha)}{\partial x^i \partial y^k} \right| < \mu \Delta \ ,$$

där Δ är en kvantitet, som tenderar mot noll samtidigt med ytan af PMN. Genom att använda samma slutsätt som vid den analoga frågan i den föregående afdelningen, finna vi att $z(x,y,\alpha)$ är identiskt $= 0$ inom och på gränsen af PMN. På analogt sätt med det, vi där använde, finna vi vidare att $z(x,y,\alpha)$ är identiskt $= 0$ inom hela sitt existensområde.

Vi öfvergå nu till behandling af det fall då $\frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$. Vi kunna åsidosätta det fall, då både $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ och $\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$, emedan då θ blir konstant, och således $\int_{\alpha_0}^{\theta} f(\alpha) z(x,y,\alpha)\, d\alpha$ alltid satisfierar differentialekvationen.

Antag sålunda till exempel $\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \theta}{\partial x} \neq 0$.

Vi få då

$$\sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = \sum_{ik} A_{ik} \left(\sum_{r=1}^{i} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} \left[f(\theta) \frac{\partial^{i+k-r} z(x,y,\theta)}{\partial x^{i-r} \partial y^k} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \right) .$$

Vi införa beteckningarna

$$D_{x^i y^k}(z) = \sum_{rs} A_{i+r,k+s} \cdot \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}$$

$$D_{x^i y^k}\left(\frac{d^l}{dx^l}(z)\right) = \sum_{rs} A_{i+r,k+s} \frac{d^l}{dx^l} \cdot \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}$$

$$D^{(\alpha,\beta)}_{x^i y^k}(z) = \sum_{rs} \frac{\partial^{\alpha+\beta} A_{i+r,k+s}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \cdot \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}$$

$$\left\{\begin{array}{l} r = 0,1\ldots(p-i) \\ s = 0,1\ldots(q-k) \\ i = 0,1\ldots p \\ k = 0,1\ldots q \end{array}\right\}$$

$$u = f(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Man finner då utan svårighet, att den föregående summan låter skrifva sig

$$\sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = \overline{G}_p(z) u^{(p-1)} + \overline{G}_{(p-1)}(z) u^{(p-2)} + \ldots + \overline{G}_1(z) \cdot u \,,$$

där

$$\begin{array}{l}
\overline{G}_p(z) = D_{x^p}(z) \\
\overline{G}_{p-1}(z) = \binom{p-1}{1} D_{x^p}\left(\frac{d}{dx}(z)\right) + D_{x^{p-1}}(z) \\
\overline{G}_{p-2}(z) = \binom{p-1}{2} D_{x^p}\left(\frac{d^2}{dx^2}(z)\right) + \binom{p-2}{1} D_{x^{p-1}}\left(\frac{d}{dx}(z)\right) + D_{x^{p-2}}(z) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overline{G}_{p-r}(z) = \binom{p-1}{r} D_{x^p}\left(\frac{d^r}{dx^r}(z)\right) + \binom{p-2}{r-1} D_{x^{p-1}}\left(\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(z)\right) + \ldots \\
\qquad + \binom{p-r}{1} D_{x^{p-r-1}}(z) + D_{x^{p-r}}(z) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overline{G}_1(z) = D_{x^p}\left(\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(z)\right) + D_{x^{p-1}}\left(\frac{d^{p-2}}{dx^{p-2}}(z)\right) + \ldots + D_{x^2}\left(\frac{d}{dx}(z)\right) + D_x(z)
\end{array}$$

[1]) $D_{x^i y^k}(z)$ erhålles ur $F(z)$ genom att sänka differationsordningen i enheter i afseende på x och k enheter i afseende på y i hvarje term.

På grund af antagandet är u en arbiträr funktion. Därför måste, för att $Z(x,y)$ skall satisfiera differentialekvationen, koefficienterna för u och dess derivator vara $= 0$ d. v. s.

$$\bar{G}_i(z(x,y,\theta)) = 0$$
$$(i = 1,2\ldots p)$$

Detta system reduceras lätt på formen

$$G_i(z(x,y,\theta)) = 0$$
$$(i = 1,2\ldots p)\,,$$

där

$$\left\{\begin{array}{l}
G_p(z) = D_{x^p}(z) \\
G_{p-1}(z) = \binom{p-1}{1} D^{(1,0)}_{x^p}(z) - D_{x^{p-1}}(z) \\
G_{p-2}(z) = \binom{p-1}{2} D^{(2,0)}_{x^p}(z) - \binom{p-2}{2} D^{(1,0)}_{x^{p-1}}(z) + D_{x^{p-2}}(z) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
G_{p-r}(z) = \binom{p-1}{r} D^{(r,0)}_{x^p}(z) - \binom{p-2}{r-1} D^{(r-1,0)}_{x^{p-1}}(z) + \ldots \\
\qquad\qquad + (-1)^{r-1}\binom{p-r}{1} D^{(1,0)}_{x^{p-r-1}}(z) + (-1)^r D_{x^{p-r}}(z) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
G_1(z) = D^{(p-1,0)}_{x^p}(z) - D^{(p-2,0)}_{x^{p-1}}(z) + \ldots + (-1)^{p-2} D^{(1,0)}_{x^2}(z) + (-1)^{p-1} D_x(z).
\end{array}\right.$$

Således, på de karakteristiker, som definieras genom ekvationen $\theta(x) = \alpha$, måste $z(x,y,\alpha)$ satisfiera ekvationerna

$$G_i(z(x,y,\alpha)) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (A)$$
$$(i = 1,2\ldots p)\,.$$

Omvändt är tydligt att om $z(x,y,\alpha)$ satisfierar (A) på karakteristikerna $\theta(x) = \alpha$, så är $\int_{\alpha_0}^{\theta(x)} f(\alpha) z(x,y,\alpha)\,d\alpha$ en lösning till vår differentialekvation.

Hade vi antagit, att $\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\theta}{\partial y} \neq 0$, så skulle vi på samma sätt som ofvan $\left(\text{med användande af den andra formen på } \frac{\partial^{i+k} z(x,y)}{\partial x^i\,\partial y^k}\right)$ funnit att det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att integralen $\int_{\alpha_0}^{\theta(y)} f(\alpha)\,z(x,y,\alpha)\,.\,d\alpha$ skall satisfiera differentialekvationen är att

på de karakteristiker, som satisfiera ekvationen $\theta(y) = \alpha$, $z(x,y,\alpha)$ satisfierar systemet

$$H_k(z(x,y,\alpha)) = 0 \,, \quad \ldots\ldots \quad (B)$$
$$(k = 1,2\ldots q)$$

där

$$\left\{\begin{array}{l} H_q(z) = Dy^q(z) \\ H_{q-1}(z) = \binom{q-1}{1} D_{y^q}^{(0,1)}(z) - Dy^{q-1}(z) \\ H_{q-2}(z) = \binom{q-1}{2} D_{y^q}^{(0,2)}(z) - \binom{q-2}{1} D_{y^{q-1}}^{(0,1)}(z) + Dy^{q-2}(z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{q-r}(z) = \binom{q-1}{r} D_{y^q}^{(0,r)}(z) - \binom{q-2}{r-1} D_{y^{q-1}}^{(0,r-1)}(z) + \ldots + \\ \qquad + (-1)^{r-1}\binom{q-r}{1} D_{y^{q-r-1}}^{(0,1)}(z) + (-1)^r D_{y^{q-r}}(z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_1(z) = D_{y^q}^{(0,q-1)}(z) - D_{y^{q-1}}^{(0,q-2)}(z) + \ldots + (-1)^{q-2} D_y^{(0,1)}(z)_2 + (-1)^{q-1} Dy(z). \end{array}\right.$$

En lösning till vår differentialekvation, som för $\theta(x) = \alpha$ resp. $\theta(y) = \alpha$ satisfierar systemet (A) resp. systemet (B), kalla vi en principalfunktion.

Genom att ersätta α med en lämpligt vald funktion af α, kan man få $\int_{\alpha_0}^{\theta} f(\alpha) z(x,y,\alpha)\, d\alpha$ att öfvergå i en integral af formen $\int_{\alpha_0}^{x} \bar{f}(\alpha) \bar{z}(x,y,\alpha)$ resp. $\int_{\alpha_0}^{y} \bar{f}(\alpha) \bar{z}(x,y,\alpha) d\alpha$, allteftersom θ är funktion af x eller af y. Vi behöfva således endast betrakta våra integraler under antagandet att öfre gränsen är x eller y. Det föregående resultatet kunna vi då formulera sålunda:

Integralen $\int_{\alpha_0}^{x} f(\alpha) z(x,y,\alpha)\, dx$ resp. $\int_{\alpha_0}^{y} f(\alpha) z(x,y,\alpha) d\alpha$ satisfiera vår differentialekvation om $z(x,y,\alpha)$ för $x = \alpha$ resp. $y = \alpha$ satisfierar systemet (A) resp. systemet (B).

Vi öfvergå nu till att uppvisa existensen af principalfunktionerna. Därvid kunna vi nöja oss med att betrakta de i x principala funktionerna, enär de i y principala kunna behandlas på samma sätt.

Vi skola således visa, att det existerar integraler $z(x,y,\alpha)$ till $F(z) = 0$, som för $x = \alpha$ satisfiera systemet

$$G_i(z) = 0 \,.$$
$$(i = 1,2\ldots p)$$

Därvid antaga vi, att $\frac{\partial^\mu A_{ik}}{\partial x^\mu}$ $(\mu = 0, 1 \ldots (p-1))$ äro kontinuerliga, då $\begin{pmatrix} \alpha \leq x \leq \alpha + a \\ \beta \leq y \leq \beta + b \end{pmatrix}$.

Betrakta ekvationen

$$G_p(z) = 0 \; .$$

Genom att ersätta x med α och z med Y_0 bilda vi ekvationen

$$\sum_{s=0}^{q} A_{p,s}(\alpha, y) \frac{d^s Y_0}{dy^s} = 0 \, ,$$

som är en lineär differentialekvation af ordningen q, i hvilken koefficienten för den högsta derivatan är ett. Denna differentialekvation integrera vi och antaga att begynnelsevärdena för $Y_0, \frac{dY_0}{dy} \ldots \frac{d^{q-1} Y_0}{dy^{q-1}}$ för $y = \beta$ äro $\lambda_0^0, \lambda_0^1 \ldots \lambda_0^{q-1}$. Den integral, som härigenom blir bestämd $Y(y)$, är kontinuerlig, då $\beta \leq y \leq \beta + b$ jämte derivatorna t. o. m. ordningen q.

Betrakta vidare ekvationen

$$G_{p-1}(z) = 0$$

och bilda ur den genom att ersätta $\frac{\partial z}{\partial x}$ med Y_1, z med den redan bestämda funktionen Y_0 ekvationen

$$\sum_s A_{p,s}(\alpha, y) \frac{d^s Y_1}{dy^s} + \sum A_{p-1,s}(\alpha, y) \frac{d^s Y_0}{dy^s} - (p-1) \sum_s \frac{\partial A_{p,s}(\alpha, y)}{\partial x} \frac{d^s Y_0}{dy^s} = 0,$$

som är en lineär differentialekvation af ordningen q, i hvilken koefficienten för högsta derivatan är ett. Ur denna ekvation bestämma vi $Y_1(y)$, så att för $y = \beta$ $Y_1, \frac{dY_1}{dy} \ldots \frac{d^{q-1} Y_1}{dy^{q-1}}$ antaga begynnelsevärdena $\lambda_1^0, \lambda_1^1, \ldots \lambda_1^{q-1}$. Denna funktion är kontinuerlig jämte derivatorna t. o. m. ordningen q, då $\beta \leq y \leq \beta + b$.

Vidare betrakta vi ekvationen

$$G_{p-2}(z) = 0 \, ,$$

med hvilken vi genom att ersätta $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ med Y_2 och i stället för $\frac{\partial z}{\partial x}$ och z insätta de redan bestämda funktionerna Y_1 och Y_0 på

analogt sätt med i de föregående fallen bilda en lineär differentialekvation af ordningen q, i hvilken koefficienten för högsta derivatan är ett. Ur denna ekvation bestämma vi funktionen $Y_2(y)$, kontinuerlig då $\beta \leq y \leq \beta + b$, så att för $y = \beta$, Y_2, $\frac{d Y_2}{dy} \cdots \frac{d^{q-1} Y_2}{dy^{q-1}}$ antaga begynnelsevärdena $\lambda_2^0, \lambda_2^1 \ldots \lambda_2^{q-1}$.

Om vi fortgå på detta sätt och betrakta differentialekvationerna $G_i(z) = 0$, få vi p funktioner $Y_0(y), Y_1(y) \ldots Y_{p-1}(y)$ bestämda, kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen q, då $\beta \leq y \leq \beta + b$. Enligt den i förra afdelningen bevisade satsen kunna vi bilda en funktion $z(x,y,\alpha)$ sådan, att för $x = \alpha$

$$z, \frac{\partial z}{\partial x} \cdots \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}}$$

antaga värdeföljderna

$$Y_0(y), Y_1(y) \ldots Y_{p-1}(y)$$

och detta på oändligt många sätt, emedan man kan föreskrifva godtyckliga värdeföljder $X_0(x), X_1(x) \ldots X_{p-1}(x)$ för $y = \beta$ för funktionerna

$$z, \frac{\partial z}{\partial y} \cdots \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}},$$

blott funktionerna $X(x)$ äro kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen p inom t. ex. området $\beta \leq x \leq \beta + b$ samt vilkoret

$$\left(\frac{d^\lambda X_\mu}{dx^\lambda}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{d^\mu Y_\lambda}{dy^\mu}\right)_{y=\beta}$$

är uppfyldt.

En så bestämd funktion $z(x,y,\alpha)$ satisfierar på grund af det sätt, på hvilket vi bildade funktionerna $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ för $x = \alpha$ systemet

$$G_i(z) = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots p)$$

och definierar således en principalfunktion, kontinuerlig jämte de i differentialekvationen ingående derivatorna inom området

$$\begin{pmatrix} \alpha \leq x \leq \alpha + a \\ \beta \leq y \leq \beta + b \end{pmatrix}.$$

De godtyckliga funktionerna $X(x)$ kunna vi bestämma ur systemet

$$H_k(z) = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots q)$$

alldeles på samma sätt som funktionerna $Y(y)$ bestämdes ur systemet

$$G_i(z) = 0 .$$
$$(i = 1, 2 \ldots p)$$

Den funktion, som då framkommer har egenskapen att för $x = \alpha$ satisfiera systemet $G_i(z) = 0$ för $y = \beta$ systemet $H_k(z) = 0$. Den är således principal både i x och y. Vi teckna den i det följande med $z(x, y, \alpha, \beta)$.

Antag att koefficienterna till differentialekvationen jämte derivatorna $\frac{\partial^\mu A_{ik}}{\partial x^\mu}$ $(\mu = 1, 2 \ldots p)$, $\frac{\partial^\nu A_{ik}}{\partial y^\nu}$ $(\nu = 1, 2 \ldots q)$ äro kontinuerliga, då $\begin{pmatrix} x_0 \leq x \leq x_0 + a \\ y_0 \leq y \leq y_0 + b \end{pmatrix}$ (R).

Låt $z(x, y, \alpha)$ och $z(x, y, \beta)$ vara tvänne i x resp. y principala funktioner, definierade inom R (så att funktionerna X och Y och deras derivator med afseende på x och y äro kontinuerliga funktioner af x, y, α, β i $(R + r)$ jämte derivatorna i afseende på α, β till och med ordningen $(p - 1), (q - 1)$ resp.).

Låt $\varphi(\alpha)$ vara en godtycklig funktion, kontinuerlig jämte derivatorna t. o. m. ordningen $(p - 1)$, då $x_0 \leq \alpha \leq x_0 + a$ och $\psi(\beta)$ en godtycklig funktion, kontinuerlig jämte derivatorna t. o. m. ordningen $(q - 1)$, då $y_0 \leq \beta \leq y_0 + b$.

Då äro

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha \, , \int_{y_0}^{y} \psi(\beta) z(x, y, \beta) d\beta$$

integraler till vår differentialekvation, kontinuerliga jämte de i differentialekvationen ingående derivatorna i $(R + r)$.

Med tillhjälp af integraler af denna form kunna generellare integraler till vår differentialekvation framställas.

Låt $z_1(x, y, \alpha), z_2(x, y, \alpha) \ldots z_q(x, y, \alpha)$ vara q i x principala integraler, definierade på ofvan angifvet sätt inom $(R + r)$, låt $\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha) \ldots \varphi_q(\alpha)$ vara q arbiträra funktioner, kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen $(p - 1)$, då $x_0 \leq \alpha \leq x_0 + a$.

Bilda integralen

$$Z(x,y) = \int_{x_0}^{x} [\varphi_1(\alpha) z_1(x,y,\alpha) + \varphi_2(\alpha) z_2(x,y,\alpha) + \ldots + \varphi_q(\alpha) z_q(x,y,\alpha)] d\alpha \, .$$

Vi skola då undersöka, om man kan bestämma funktionerna $\varphi(\alpha)$, så att

$$Z(x,y_0) = X_0(x), \frac{\partial Z(x,y_0)}{\partial y} = X_1(x) \ldots \frac{\partial^{q-1} Z(x,y_0)}{\partial y^{q-1}} = X_{q-1}(x) \, ;$$

där $X_0(x), X_1(x) \ldots X_{q-1}(x)$ äro funktioner, kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen p, då $x_0 \leq x \leq x + a$ samt noll för $x = x_0$.

En analog fråga fås, då vi betrakta de i y principala integralerna. Dessa frågor äro specialfall af följande.

Att bestämma funktionerna $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$, kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen $(m-1)$, då $\alpha \leq x \leq \beta$, så att de satisfiera systemet

$$\theta_1(y) - \theta_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{y} [f_1(x) H_{11}(x,y) + f_2(x) H_{12}(x,y) + \ldots + f_n(x) H_{1n}(x,y)] dx$$

$$\theta_2(y) - \theta_2(\alpha) = \int_{\alpha}^{y} [f_1(x) H_{21}(x,y) + f_2(x) H_{22}(x,y) + \ldots + f_n(x) H_{2n}(x,y)] dx$$

. . . .

$$\theta_n(y) - \theta_n(\alpha) = \int_{\alpha}^{y} [f_1(x) H_{n1}(x,y) + f_2(x) H_{n2}(x,y) + \ldots + f_n(x) H_{n.n}(x,y)] dx \, ,$$

där funktionerna $\theta_i(y) (i = 1,2 \ldots n)$, $H_{is}(x,y) \begin{pmatrix} i = 1,2 \ldots n \\ s = 1,2 \ldots n \end{pmatrix}$ äro kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen m, då $\alpha \leq {x \atop y} \leq \beta$.

Denna fråga har blifvit behandlad af VOLTERRA i de i inledningen citerade afhandlingarna. I det följande skall jag i korthet redogöra för vissa af hans undersökningar[1]).

[1]) Är determinanten $[H_{is}] \neq 0$ inom området ifråga, kan man genom en enkel användning af metoden för successiva approximationer direkt visa, att det existerar ett och endast ett system af funktioner $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ med de begärda egenskaperna (jfr det ofvan citerade arbetet af LE ROUX).

Låt $S_0(x,y)$ vara en funktion, som är kontinuerlig jämte de partiella derivatorna t. o. m. ordningen m, då $\alpha \leq {x \atop y} \leq \beta$. Bilda funktionerna $S_i(x,y)\,(i = 1, 2 \ldots \infty)$, definierade genom likheterna

$$S_i(x,y) = \int_y^x S_{i-j}(x,\zeta)\,S_{j-1}(\zeta,y)\,d\zeta\,,$$

där $1 \leq j \leq i$.

Dessa bero ej af j. Detta är tydligt för $i = 1$. Vi skola visa, att om vi antaga att denna egenskap är sann för alla värden på i från 1 till i, så är den ock sann för $(i+1)$.

Ty

$$S_{i+1}(x,y) = \int_y^x S_0(\zeta,y)\,S_i(x,\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \int_y^x S_0(\zeta,y)\,d\zeta \int_\zeta^x S_{i-j}(x,\zeta_1)\,S_{j-1}(\zeta_1,\zeta)\,d\zeta_1 =$$

$$= \int_y^x S_{i-j}(x,\zeta_1)\,d\zeta_1 \int_y^{\zeta_1} S_0(\zeta,y)\,S_{j-1}(\zeta_1,\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \int_y^x S_{i-j}(x,\zeta_1)\,S_j(\zeta_1,y)\,d\zeta_1 =$$

$$= \int_y^x S_{i+1-j'}(x,\zeta_1)\,S_{j'-1}(\zeta_1,y)\,d\zeta_1$$

$$(1 \leq j' \leq i+1)\,.$$

Om M är öfre gränsen för $|\,S_0(x,y)\,|$, så hafva vi

$$\left|\,S_i(x,y)\,\right| \leq \frac{M^{i+1}(|y-x|)^i}{i!}\,.$$

Bevis från i till $(i+1)$.

Vi hafva

$$S_{i+1}(x,y) = \int_y^x S_i(x,\zeta)\,S_0(\zeta,y)\,d\zeta\,,$$

hvaraf följer

$$\left|\,S_{i+1}(x,y)\,\right| < \frac{M^{i+2}(|y-x|)^{i+1}}{(i+1)!}\,,$$

och således är påståendet bevisadt.

Bilda serien

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i(x,y)\,.$$

På grund af de bevisade olikheterna följer, att denna serie är likformigt konvergent, då $\alpha \leq \frac{x}{y} \leq \beta$. Den representerar således en funktion $F_0(x,y)$, kontinuerlig inom detta område. Denna funktion har kontinuerliga derivator t. o. m. ordningen m [1].

Tydligen har man formlerna

$$F_0(x,y) - S_0(x,y) = \int_y^x S_0(x,\zeta) \cdot F_0(\zeta,y)\,d\zeta$$

$$= \int_y^x S_0(\zeta,y) F_0(x,\zeta)\,d\zeta \;.$$

Vi utföra nu på funktionen $F_0(x,y)$ liknande operationer med dem, vi utfört på $S_0(x,y)$

$$F_i(x,y) = \int_x^y F_{i-j}(x,\zeta) F_{j-1}(\zeta,y)\,d\zeta$$

och bilda funktionen

$$T_0(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(x,y) \;.$$

Vi skola visa, att man har

$$T_0(x,y) = S_0(x,y) \;.$$

Tydligen är

$$T_0(x,y) - F_0(x,y) = \int_x^y F_0(x,\zeta)\, T_0(\zeta,y)\,d\zeta$$

$$= \int_x^y F_0(\zeta,y)\, T_0(x,\zeta)\,d\zeta$$

och således med tillhjälp af formeln i det föregående

$$T_0(x,y) - S_0(x,y) = \int_x^y F_0(\zeta,y)\,[T_0(x,\zeta) - S_0(x,\zeta)]\,d\zeta \;.$$

Låt μ vara maximum af $|\,T_0(x,y) - S_0(x,y)\,|$. Vi hafva då tydligen $\mu < M\mu\,|\,y - x\,|$. Således då $M\,|\,y - x\,| < 1$, måste $T_0(x,y) = S_0(x,y)$, ty annars komma vi till en motsägelse. Utan svårighet inses, att denna öfverensstämmelse gäller, hvar hälst x och y äro belägna inom intervallet $(\alpha \ldots \beta)$.

Vi skola nu med tillhjälp af det vunna resultatet bevisa en sats, som för frågan om inversionen af systemet på sid. 24 är af största betydelse.

[1]) Ty serierna $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^{\mu+\nu} S_i(x,y)}{\partial x^{\mu} \partial y^{\nu}}$ $(\mu + \nu \leq m)$ äro likformigt konvergenta, då $\alpha \leq \frac{x}{y} \leq \beta$ på grund af en olikhet, analog med den ofvan för $|\,S_i(x,y)\,|$ angifna.

Låt $\varphi(x)$ vara en funktion, som är kontinuerlig jämte derivatorna t. o. m. ordningen m, då $\alpha \leq x \leq \beta$, och sätt

$$\varphi(y) - f(y) = \int_\alpha^y \varphi(x) F_0(x,y) dx .$$

Multiplicera de bägge membra i denna ekvation med $S_0(y,z)dy$ och integrera från α till z, så fås

$$\int_\alpha^z [\varphi(y) - f(y)] S_0(y,z) dy = \int_\alpha^z S_0(y,z) \int_\alpha^y \varphi(x) F_0(x,y) dx .$$

Genom omvändning af integrationsordningen, erhåller man

$$\int_\alpha^z [\varphi(y) - f(y)] S_0(y,z) dy = \int_\alpha^z \varphi(x) dx \int_x^z S_0(y,z) F_0(x,y) dy$$

$$= \int_\alpha^z \varphi(x) [S_0(x,z) - F_0(x,z)] dx$$

och således

$$\int_\alpha^z f(y) S_0(y,z) dy - \int_\alpha^z \varphi(x) F_0(x,z) dx = \varphi(z) - f(z) .$$

Således: formeln

$$\varphi(z) = f(z) + \int_\alpha^z f(y) S_0(y,z) dy$$

kan inverteras, och man har

$$f(z) = \varphi(z) - \int_\alpha^z \varphi(x) F_0(x,z) dx .$$

Betrakta nu systemet å sid. 24. Genom att differentiera ekvationerna i detta system med afseende på y, erhålles

$$\theta'_i(y) = \sum_1^n \mathrm{s} f_s(y) H_{is}(y,y) + \int_\alpha^z \sum_1^n \mathrm{s} f_s(x) \frac{\partial H_{is}(x,y)}{\partial y} dx$$

$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

Sätt

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} H_{11}, H_{12} \ldots H_{1n} \\ H_{21}, H_{22} \ldots H_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ H_{n1}, H_{n2} \ldots H_{nn} \end{vmatrix}$$

och beteckna med $D_{i,s}(x,y)$ den till elementet H_{is} hörande underdeterminanten. Ur det föregående systemet kunna vi då bilda följande

$$\sum_1^n i \frac{D_{ir}(y,y)}{D(y,y)} \theta'_i(y) = f_r(y) + \int_\alpha^y \sum_1^n s f_s(x) \sum_1^n i \frac{D_{ir}(y,y)}{D(y,y)} \frac{\partial H_{is}(x,y)}{\partial y} dx$$

$$(r = 1,2 \ldots n)$$

Sätt

$$\varphi_r(y) = \sum_1^n i \frac{D_{ir}(y,y)}{D(y,y)} \theta'_i(y)$$

$$S_{rs}^{(0)}(x,y) = \sum_1^n i \frac{D_{ir}(y,y)}{D(y,y)} \frac{\partial H_{is}(x,y)}{\partial y} \,,$$

så fås

$$\varphi_r(y) = f_r(y) + \int_\alpha^y \sum_1^n s f_s(x) S_{rs}^{(0)}(x,y)\, dx$$

$$(r = 1,2 \ldots n) \,.$$

Antaga vi att $D(y,y) \neq 0$, då $\alpha \leq y \leq \beta$, så kunna vi reducera frågan att bestämma funktionerna $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ till lösning af funktionsekvationer af samma form som den ofvan betraktade, men i hvilka endast en obekant funktion ingår i hvarje.

Fördenskull skall jag visa, hur man ur systemet här ofvan kan eliminera en af de obekanta funktionerna, t. ex. $f_1(x)$, och få för bestämmandet af de öfriga ett system af samma form, innehållande $(n-1)$ ekvationer.

Den första ekvationen i vårt system skrifva vi på formen

$$\Phi(y) = \varphi_1(y) - \int_\alpha^y \sum_2^n s f_s(x) S_{1s}^{(0)}(x,y)\, dx = f_1(y) + \int_\alpha^y f_1(x) S_{11}^{(0)}(x,y) dx.$$

Antaga vi, att det existerar funktioner $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ af den önskade beskaffenheten, som satisfiera vårt system, så kunna vi bestämma $f_1(x)$ såsom funktion af $f_2(x) \ldots f_n(x)$ enligt formeln

$$f_1(y) = \Phi(y) - \int_\alpha^y \Phi(x) F_{11}^{(0)}(x,y) dx \,.$$

Insätt nu enligt denna formel f_1 i de öfriga ekvationerna i systemet, så få vi

$$\varphi_r(y) = f_r(y) + \int_\alpha^y \Big\{\Big[\Phi(x) \quad \int_\alpha^x \Phi(x')\, F_{11}^{(0)}(x',x)\,dx'\Big] S_{r1}^{(0)}(x,y) +$$

$$+ \sum_2^n \mathrm{s} f_s(x) S_{rs}^{(0)}(x,y)\Big\}\, dx$$

$$(r = 2, 3 \ldots n)\ .$$

Genom ett par ombyten af integrationsordningen finna vi

$$\Phi_r(y) = f_r(y) + \int_\alpha^y \sum_2^n \mathrm{s} f_s(x)\, \overline{S}_{rs}^{(0)}(x,y)\, dx$$

$$(r = 2, 3 \ldots n),$$

där

$$\Phi_r(y) = \varphi_r(y) - \int_\alpha^y \varphi_1(x)\Big[S_{r1}^{(0)}(x,y) - \int_x^y S_{r1}^{(0)}(x',y)\, F_{11}^{(0)}(x,x')\, dx\Big]\, dx$$

$$\overline{S}_{rs}^{(0)}(x,y) = S_{rs}^{(0)}(x,y) - \int_x^y S_{1s}^{(0)}(x x'')\Big[S_{r1}^{(0)}(x'',y) -$$

$$- \int_{x''}^y S_{r1}^{(0)}(x',y)\, F_{11}^{(0)}(x'',x')\, dx'\Big] dx''\ .$$

Bestämmas $f_2(x) \ldots f_n(x)$ ur detta system och $f_1(x)$ enligt formeln

$$f_1(y) = \Phi(y) - \int_\alpha^y \Phi(x)\, F_{11}^{(0)}(x,y)\, dx\ ,$$

så satisfiera $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ vårt ursprungliga system och utgöra dess allmännaste lösning.

Vi kunna nu använda det föregående förfaringssättet till att nedbringa systemet af $(n-1)$ ekvationer till $(n-2)$ ekvationer o. s. v. och slutligen få att lösa en enda funktionsekvation. Funktionerna $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ blifva tydligen kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen $(m-1)$.

Under förutsättning att $D(y,y) \neq 0$ inom området i fråga, är således inversionsproblemet entydigt lösbart. Då $D(y,y) = 0$ inom detta område, inträda mera komplicerade förhållanden. VOLTERRA har i detta fall gjort djupgående undersökningar, hvilka närmast äro utvecklade för det fall att fråga är om en enda funktionallikhet.

Vi betrakta funktionallikheten

$$\theta(y) - \theta(\alpha) = \int_\alpha^y f(x) H(x, y) dx ,$$

där $\theta(y)$ och $H(x, y)$ äro kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. en viss ordning och antaga att $H(y, y)$ är noll inom området i fråga. Två fall kunna då inträffa. Antingen är $H(y, y) \equiv 0$ eller icke.

I det förra fallet antaga vi, att

$$H(x, y) = (y - x)^\varkappa H(x, y) ,$$

där $\varkappa > 0$ och $\bar{H}(x, y)$ är en funktion, som uppfyller samma kontinuitetsvilkor som $H(x, y)$ och är sådan, att $H(y, y)$ icke är noll inom området i fråga. $\theta(y)$ måste då vara noll jämte derivatorna t. o. m. ordningen r för $y = \alpha$, då r är det hela tal, som är närmast större än $\varkappa$ (när $\varkappa$ är ett helt tal, sättes $r = \varkappa$).

Differentieras funktionallikheten r gånger, så fås

$$\theta^{(r)}(y) = \int_\alpha^y f(x) \frac{K(x, y)}{(y - x)^{\varkappa - r}} dx ,$$

där $K(x, y)$ är kontinuerlig (jämte derivatorna t. o. m. en viss ordning) och $K(y, y) \neq 0$ samt $0 \leq r - \varkappa < 1$. Är $\varkappa = r$, så är denna funktionallikhet af den i det föregående behandlade typen; är så ej förhållandet, har Volterra visat, att $f(x)$ kan bestämmas ur en sådan af annan form, och inversionen blir således entydig[1]).

Då $H(y, y)$ är noll endast i isolerade punkter, blir inversionsproblemet långt svårare. Det är till denna fråga Volterras nota IV i Atti della R. Accademia di Torino för 1896 refererar sig.

Antag, att vår funktionallikhet har formen

$$\theta(y) = \int_0^y f(x) H(x, y) dx ,$$

och att $H(y, y)$ icke blir noll inom intervallet $(0 \ldots \beta)$, $\beta > 0$ utom då $y = 0$. Antag vidare, att $H(x, y)$ kan utvecklas enligt Mac-Laurins formel, d. v. s.

[1]) Se: Atti della R. Acc. di Torino 1896 (nota II), Rendiconti della R. Acc. dei Lincei 1896.

$$H(x\,,y) = \sum_0^n i\, a_i x^i y^{n-i} + \bar{H}(x\,,y)$$

($\theta(y)$ måste då vara af formen $y^{n+1}\bar{\theta}(y)$, där $\bar{\theta}(y)$ uppfyller samma kontinuitetsvilkor som $\theta(y)$).

Volterra har då visat, att om alla rötterna till ekvationen

$$\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0$$

äro ändliga och skilda från hvarandra samt hafva sina reela delar positiva, så kan $f(x)$ bestämmas ur en funktionallikhet af den normala formen $(H(y\,,y) \neq 0)$; således att problemet är entydigt upplösbart. Har däremot någon rot sin reela del negativ (under det att samma vilkor för öfrigt äro uppfylda) och det existerar en lösning till funktionallikheten, så existerar det också oändligt många [1]).

Tillämpa vi det föregående på den uppställda frågan vid differentialekvationen, så inses att ifall determinanten

$$\begin{vmatrix} z_1(\alpha\,,y_0\,,\alpha)\,, & z_2(\alpha\,,y_0\,,\alpha) & \ldots & z_q(\alpha\,,y_0\,,\alpha) \\ \frac{\partial z_1(\alpha\,,y_0\,,\alpha)}{\partial y}\,, & \frac{\partial z_2(\alpha\,,y_0\,,\alpha)}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial z_q(\alpha\,,y_0\,,\alpha)}{\partial y} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial^{q-1} z_1(\alpha\,,y_0\,,\alpha)}{\partial y^{q-1}}\,, & \frac{\partial^{q-1} z_2(\alpha\,,y_0\,,\alpha)}{\partial y^{q-1}} & \ldots & \frac{\partial^{q-1} z_q(\alpha\,,y_0\,,\alpha)}{\partial y^{q-1}} \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

då $x_0 \leq \alpha \leq x_0 + a$, så existerar det ett och endast ett system funktioner $\varphi_1(\alpha)\,, \varphi_2(\alpha) \ldots \varphi_q(\alpha)$ af den begärda beskaffenheten.

Det är nu lätt att inse, att man kan bilda den allmänna integralen till differentialekvationen medels integraler tagna öfver principalfunktioner.

Antag, att koefficienterna A_{ik} jämte derivatorna af formen $\frac{\partial^\mu A_{ik}}{\partial x^\mu}$ $(\mu = 1\,,2 \ldots p)$, $\frac{\partial^\nu A_{ik}}{\partial y^\nu}$ $(\nu = 1\,,2 \ldots q)$ äro kontinuerliga inom området $\begin{pmatrix} x_0 \leq x \leq x_0 + a \\ y_0 \leq y \leq y_0 + b \end{pmatrix}$ (R).

---

[1]) Frågan om när rötterna till en algebraisk ekvation hafva sina reela delar positiva har blifvit behandlad af Hurwitz i Math. Ann. Bd 46.

Låt integralen vara definierad därigenom att för $x = x_0$

$$z, \frac{\partial z}{\partial x} \dots \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}}$$

skola antaga värdeföljderna

$$Y_0(y), Y_1(y) \dots Y_{p-1}(y),$$

kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen q, då $y_0 \leq y \leq y_0 + b$, och för $y = y_0$

$$z, \frac{\partial z}{\partial y} \dots \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}}$$

skola antaga värdeföljderna

$$X_0(x), X_1(x) \dots X_{q-1}(x),$$

kontinuerliga jämte derivatorna t. o. m. ordningen p, då $x_0 \leq x \leq x_0 + a$.

Vilkoret

$$\left(\frac{d^\lambda Y_\mu}{dy^\lambda}\right)_{y=y_0} = \left(\frac{d^\mu X_\lambda}{dx^\mu}\right)_{x=x_0}$$

antages vara uppfyldt.

Denna integral existerar då (och är entydigt bestämd) inom R.

Låt $z(x, y)$ vara en partikulär integral till differentialekvationen, definierad inom R och sådan, att i punkten (x_0, y_0), $z, \frac{\partial z}{\partial x} \dots \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}}, \frac{\partial z}{\partial y} \dots \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}}$ antaga samma värden som den sökta integralen; låt vidare $z_1(x, y, \alpha), z_2(x, y, \alpha) \dots z_q(x, y, \alpha)$ vara q i x principala integraler, $z_1(x, y, \beta), z_2(x, y, \beta) \dots z_p(x, y, \beta)$ p i y principala integraler, som äro definierade i R (uppfyllande de i det föregående angifna kontinuitetsvilkoren och olikheterna).

Den sökta integralen $Z(x, y)$ kan då skrifvas

$$Z(x, y) = z(x, y) + \int_{x_0}^{x} \sum_{\mu=1}^{q} \varphi_\mu(\alpha) z_\mu(x, y, \alpha) d\alpha +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \sum_{\nu=1}^{p} \psi_\nu(\beta) z_\nu(x, y, \beta) d\beta,$$

där funktionerna φ och ψ bestämdts på angifvet sätt.

Antages speciellt att $z(x, y, \alpha, \beta)$ är en i både x och y principal integral, definierad i R (uppfyllande de nödvändiga kontinuitetsvilkoren) med samma begynnelsevärden för $\alpha = x_0$, $\beta = y_0$ som $z(x, y)$, så kunna vi skrifva

$$Z(x, y) = z(x, y, x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \sum_{\mu=1}^{q} \varphi_\mu(\alpha) \frac{\partial^{\mu-1} z(x, y, \alpha, y_0)}{\partial \beta^{\mu-1}} d\alpha +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \sum_{\nu=1}^{p} \psi_\nu(\beta) \frac{\partial^{\nu-1} z(x, y, x_0, \beta)}{\partial \alpha^{\nu-1}} d\beta .$$

Anmärkt tryckfel:

P. 10 10:de raden uppifrån bör stå — framför integralerna.